Universidad de Chile

Rafael Romero - Meza

Ingeniero Comercial, Universidad de Chile
Doctor of Business Administration, Boston University
rromero@negocios.uchile.cl

Medidas de riesgo financiero

Este trabajo es una continuación del artículo "Definiendo un Programa de Administración de Riesgos Financieros" aparecida en la edición N° 148 de esta misma revista. El objetivo de esta serie de documentos es presentar los últimos avances en materia de administración de riesgos financieros y sus lecciones para empresas que participan en economías emergentes como la chilena[1].

En esta ocasión nos centraremos en las medidas de riesgo financiero que han sido propuestas en los últimos diez años. Aunque este es un tema eminentemente técnico, sin embargo tiene profundas implicancias prácticas. Una apropiada medición de riesgos es fundamental para una correcta gestión de riesgo de las empresas, así como una apropiada regulación del sistema financiero.

Aunque realizaremos una mención espacial a Value-at-Risk (VaR), que debido a su simpleza conceptual, es una de las medidas de riesgo

[1] El autor agradece los comentarios y sugerencias de Jorge Gregoire, Marcelo González, Gustavo Genoni, Sigifredo Laengle y Pablo Bernard, así como la asistencia de investigación de Ricardo García. Todos los errores son de exclusiva responsabilidad del autor de este documento.

más populares en la actualidad, el foco central de este documento, es hacer una llamado de atención con respecto a las deficiencias y limitaciones de VaR como una medida de riesgo. Se identifican medidas alternativas que cumplen con un conjunto de condiciones mínimas tal que pueden ser llamadas medidas coherentes de riesgo.

Las siguientes preguntas motivan el desarrollo del presente artículo: ¿Qué es Value-at-Risk (VaR), para qué sirve y cómo se mide? ¿Cuál es el origen de su popularidad? ¿Qué papel juega en la regulación de instituciones financieras? de cambio o cambios en el precio de commodities, como el petróleo o el cobre. Expertos financieros usan varios instrumentos para medir y cubrir estos riesgos. Un instrumento relativamente nuevo que ha estado recibiendo una inmensa atención en Chile y en el mundo por parte de la industria financiera y diversos reguladores es *Value-at-Risk* (VaR).

A continuación, localizaremos en un contexto histórico de la teoría financiera la medida VaR. Esto será útil para dimensionar en qué medida VaR constituye una covarianza entre todos los pares de inversiones.

Lo interesante de la propuesta de Markowitz estaba en la forma de medir el riesgo de un portafolio, que describe las características individuales (retornos de los activos) por medio de la media y la varianza de la distribución y la dependencia entre activos por medio del coeficiente de correlación lineal entre cada par de retornos aleatorios. Supongamos que un portafolio P está compuesto por dos activos, el objetivo

La necesidad de mejorar el control del riesgo financiero ha conducido al desarrollo de una medida uniforme de riesgo llamada Value-at-Risk (VaR). El sector privado, reguladores y bancos centrales han adoptado una posición activa en pro de la implementación de esta medida.

Dados los avances recientes en el modelamiento financiero, ¿está VaR en la frontera de la tecnología financiera? ¿Cuáles son los problemas conceptuales de VaR? ¿Cuáles son las alternativas conceptualmente sólidas y viables a VaR?

Introducción: cuantificación de riesgos de mercado

El propósito de los programas de administración de riesgos en las empresas es proporcionar estabilidad en los flujos financieros. Cada día las empresas enfrentan *riesgos financieros*, como por ejemplo volatilidad del tipo de cambio, de la tasa de interés y del precio de commodities, no pago de préstamos y cambios en la clasificación crediticia. Estos riesgos son divididos en dos categorías: *riesgo de crédito y riesgo de mercado*. Por una parte, riesgo de crédito incluye todos los riesgos asociados con el crédito de participantes específicos, tales como no pago potencial o cambios en la clasificación crediticia. Por otra parte, riesgo de mercado se refiere a los riesgos que afectan a amplios sectores de la economía, tales como incrementos de la tasa de interés, devaluaciones del tipo innovación, entender las críticas que ha recibido y comprender la lógica de las alternativas propuestas.

Orígenes de las medidas de riesgo

Desde un punto de vista histórico, es posible identificar tres períodos de importantes desarrollos en las finanzas modernas:

1. **media-varianza, 1952-1956**
2. **modelos en tiempo continuo, 1969-1973**
3. **medidas de riesgo, 1997-**

Antes de los trabajos de Markowitz (1952, 1959) el riesgo financiero era considerado como un factor corrective del retorno esperado y los retornos ajustados por riesgo eran definidos de una manera ad hoc. El **primer período** de importantes desarrollos fue iniciado por Markowitz que propuso como medidas de riesgo, asociada al retorno de inversiones individuales, el cuadrado de la desviación con respecto a la media de la distribución de los retornos (la varianza), y en el caso de una combinación (portafolio) de activos, la en el esquema de Markowitz es elegir las ponderaciones de cada activo tal que minimice la varianza de *P* que está dada por:

$$\sigma^2 = x_1^2\,\sigma_1^2 + 2\,x_1x_2\sigma_{12} + x_2^2\,\sigma_2^2$$

Donde x_1 y x_2 son respectivamente las ponderaciones de los activos 1 y 2. σ_1^2 y σ_2^2 son respectivamente las varianzas de los activos 1 y 2. σ_{12} es la covarianza entre el activo 1 y 2, que mide el grado de movimiento conjunto entre ambos retornos.

La aplicación práctica del modelo de Markowitz requiere suponer que la distribución de los retornos es normal o distribución-t[2]. Por lo tanto, si usamos un modelo de varianza-covarianza para distribuciones distintas a la normal o distribución-t, podemos subestimar eventos extremos que causan las mayores pérdidas. Esto es especialmente relevante para las críticas al uso de VaR como medida de riesgo, las que serán revisadas más adelante en este documento.

[2] Investigaciones recientes han identificado completamente la clase de variables aleatorias para las cuales correlaciones lineales pueden ser usadas como una medida de dependencia. Esta es la clase de distribuciones elípticas, caracterizadas por la propiedad de que sus superficies equi-densidades son elipsoides.

El atractivo de VaR, así como de otras medidas de riesgo, es informar a través de reportes financieros de las pérdidas esperadas, tal que accionistas y administradores puedan decidir si tal nivel de riesgo es aceptable o bien si es necesario reducirlo.

El **segundo período** de importantes desarrollos fue iniciado por Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes (ver Merton, 1990) y pueden ser llamados "modelos en tiempo continuo". Estos modelos permiten abordar muchos problemas asociados con la valoración de opciones y otros derivados. Un concepto de activos contingentes, central en finanzas, fue acuñado gracias a estos desarrollos. Con esta técnica es posible valorar derivados simples *o plain vanilla*, como también derivados complejos o *exóticos*. En Chile, recientemente, algunos fondos mutuos han comenzado a explorar y ofrecer a sus clientes instrumentos financieros con pagos que poseen características de opciones.

El **tercer período** de grandes desarrollos es más reciente y algunos académicos lo sitúan en 1997 cuando fueron publicados los primeros resultados sobre medidas de riesgo coherentes por parte de Artzner et al (1997, 1999).

Estos nuevos desarrollos departen del paradigma de normalidad, tratando de modelar situaciones más reales, como cuando los retornos de los activos presentan sesgo (skewness), leptocurtosis y/o colas anchas. Parte de esta nueva línea de investigación ha sido motivada por la nueva tendencia en la regulación de instituciones financieras que requiere el uso de modelos de control de riesgos muy sofisticados, a la cual la comunidad académica ha reaccionado a la imposición de medidas de riesgo incorrectas o bien inapropiadas por parte de los reguladores. (Ver Danielsson et al. (2001)).

Como respuesta a importantes desastres financieros, en 1994 fue introducida una medida uniforme de riesgo llamada Value-at-Risk, la cual tuvo una casi unánime recepción. Esta medida surge como una respuesta a la siguiente pregunta: ¿cuánto podemos esperar perder en un día, semana, mes o año dada una cierta probabilidad? ¿Cuál es el porcentaje del valor de la inversión que está en riesgo?

¿Qué es Value-at-Risk?

La necesidad de mejorar el control del riesgo financiero ha conducido al desarrollo de una medida uniforme de riesgo llamada Value-at-Risk (VaR). El sector privado, reguladores y bancos centrales han adoptado una posición activa en pro de la implementación de esta medida. El Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria anunció en abril de 1995 que los requerimientos de capital para bancos comerciales se basarán en VaR. Esta iniciativa ha sido seguida por diversos reguladores tales como Security and Exchange Comisión (SEC) de Estados Unidos, Superintendencia de Valores y Seguros (SVS) y Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (SBIF) de Chile, entre otros. Por lo tanto, la tendencia es claramente hacia reportes de riesgo financiero más transparentes basados en VaR. En este artículo, basándonos en literatura financiera reciente, queremos hacer un llamado de atención con respecto a deficiencias y limitaciones de VaR como una medida de riesgo. En particular, se mencionan varias medidas de riesgo tales como Value-at-Risk Condicional (CVaR), Expected Shortfall (ES), Expected Regret (ER) que cumplen con los requisitos básicos de *medidas de riesgo coherentes*.

El atractivo de VaR, así como de otras medidas de riesgo, es informar a través de reportes financieros de las pérdidas esperadas, tal que accionistas y administradores puedan decidir si tal nivel de riesgo es aceptable o bien si es necesario reducirlo. Además del uso de medidas de riesgo en reportes financieros, éstas pueden ser usadas en una variedad de propósitos, tales como establecimiento de límites en las posiciones para los operadores, medición de retornos sobre una base ajustada por riesgo y evaluación de modelos.

Parte de la popularidad de VaR radica en su facilidad de cálculo. Como muestra de esta sencillez relativa, utilizando una planilla electrónica, en el anexo implementamos un ejemplo de cálculo de VaR para tres activos, que es fácil de expandir para 30 o 40 activos. Adicionalmente, VaR entrega una medida consistente con respecto al efecto de cobertura sobre el riesgo total, lo que es una mejora con respecto a programas tradicionales de cobertura que típicamente se focalizan en transacciones individuales.

¿Cómo podemos medir Value-at-Risk?

Para definir formalmente el VaR de un portafolio, en primer lugar debemos elegir dos factores cuantitativos: el largo del horizonte de mantención y el nivel de confianza. Ambos son números arbitrarios. Por ejemplo, el Comité de Basilea ha propuesto usar un 99% de intervalo de confianza sobre un horizonte de 10 días de transacción. El VaR resultante es entonces multiplicado por un factor de seguridad de 3 para llegar al capital mínimo requerido para fines regulatorios. Presumiblemente, el período de 10 días corresponde al tiempo necesario para que el regulador detecte problemas y tome acciones correctivas. Además, la elección de un 99% de confianza refleja el balanceo

entre el deseo del regulador de mantener un sistema financiero seguro y el efecto adverso sobre las utilidades de los bancos por el requerimiento de capital.
VaR de un portafolio se define como la pérdida máxima con respecto al retorno medio que se puede esperar en un cierto horizonte dado una cierta probabilidad. Medido en términos de retornos porcentuales, VaR es:

VaR= $\mu - \alpha$

Donde μ es el retorno medio y α es el menor valor tal que a la izquierda de ese valor la probabilidad sea un cierto nivel, por ejemplo 1%. En el diagrama 1, VaR es la distancia entre μ y α .

VaR para Distribuciones Normales

Si la distribución puede ser supuesta como normal, el cálculo es simplificado en forma considerable. Por medio del uso de un factor multiplicativo, C, que es una función del nivel de confianza, VaR puede ser derivado directamente de la desviación estándar del portafolio.

Para reportar VaR a un 99% de nivel de confianza, el 1% de probabilidad de la cola izquierda de una distribución normal puede ser encontrada de una tabla normal estándar, en este caso C es 2,325. Luego que α ha sido identificada, VaR puede ser obtenida como[3] :

$$\text{VaR} = \mu - \alpha = C\sigma$$

El resultado clave es que VaR es proporcional a la desviación estándar. Esta simpleza explica el gran auge de VaR aplicada para distribuciones normales. Como ya fue mencionado, si la distribución de retornos es normal o distribución-t, VaR cumple con las propiedades de coherencia de las medidas de riesgo. El problema de VaR radica en que no es posible sostener que la distribución de los retornos para la mayoría de los activos se comporte normal, sino que en general presentan sesgo (skewness), leptocurtosis y/o colas anchas.

Hay una gran variedad de formas en que puede ser calculado VaR. Si las empresas usan distintos métodos de cálculo para el mismo portafolio pueden llegar a distintos números de VaR. Hay ventajas y desventajas en cada método de cálculo y no hay la mejor forma de hacerlo. Por lo tanto, cuando se utiliza VaR es importante considerar el método de cómputo y la significancia estadística de los resultados.

Los tres métodos más comunes de cálculo de VaR son: correlación, simulación histórica y simulación de Monte Carlo. Todos los métodos utilizan parámetros derivados de datos de precios históricos y valoran el portafolio en el período siguiente. Para mayor detalle sobre todos los métodos para calcular VaR se puede consultar al autor del artículo o bien consultar el libro de Hull (2003).

A continuación desarrollaremos un ejemplo para determinar VaR cuando el portafolio está formado por dos activos y los retornos son normales.

Ejemplo de cálculo de VaR

Suponga que el retorno de cada uno de los dos activos que forman el portafolio se distribuye normal. Un activo tiene un retorno esperado de 20% y el otro de 15%. La varianza del primer activo es 0,08, la del segundo es 0,05 y la covarianza es 0,02. La ponderación de cada activo es la misma.

El retorno esperado del portafolio es:

$$\mu = \frac{1}{2}\,0{,}20 + \frac{1}{2}\,0{,}15 = 0{,}175$$

La varianza del portafolio es:

$$\sigma^2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}^2 0{,}08 + \left\{\frac{1}{2}\right\}^2 0{,}05 + 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0{,}02 = 0{,}043$$

La desviación estándar del portafolio es:

$$\sigma = \sqrt{0{,}0043} = 0{,}206$$

El menor valor, α , tal que a la izquierda de ese valor la probabilidad sea 1% es: $\alpha = -0{,}305$ que puede ser obtenida a través de invertir la distribución normal. En el anexo se indica un comando para realizar tal operación en una planilla electrónica.

Por lo tanto:

VaR = 0,175 + 0,305 = 0,48.

Alternativamente:

VaR = 2,325*0,205 = 0,48.

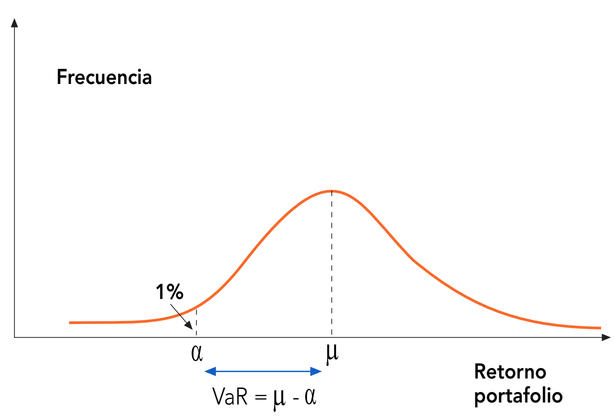
Que se interpreta como que hay un 1% de probabilidad de perder más que 48% en el próximo período.

A continuación abordamos los problemas conceptuales de VaR como medida de riesgo.

Medidas de riesgo coherentes

Medir riesgo es equivalente a establecer una correspondencia ρ entre el espacio X

Diagrama 1 :
Representación de VaR



[3] El desarrollo detallado de estos resultados puede ser solicitado directamente al autor del artículo.

de variables aleatorias, como por ejemplo los retornos de un cierto conjunto de inversiones, y un número real no negativo, es decir, $\rho : X \to R$. Medidas de riesgo permiten ordenar y comparar inversiones de acuerdo a su respectivo valor de riesgo. A estas correspondencias es necesario imponerles restricciones con el propósito de obtener definiciones con significado. Cualquier medida de riesgo que carezca de tales propiedades puede conducir a inconsistencias.

Artzner et al. (1997, 1999) derivaron un conjunto de condiciones que debe cumplir cualquier medida de riesgo. Si una medida de riesgo cumple con tales condiciones es llamada coherente.

Cualquier medida de riesgo aceptable $\rho: X \to R$ debe satisfacer las siguientes propiedades:

a) **Homogeneidad positiva:** $\rho: (\lambda x) = \lambda\rho\ (x)$ para todas las variables aleatorias x y todos los números positivos λ .
b) **Subaditividad.** $\rho: (x + y) \leq \rho\ (x) + \rho\ (y)$ para todas las variables x e y.
c) **Monotonicidad:** $x \leq\ y$ implica $\rho: (x) \leq \rho(y)$ para todas las variables x e y.
d) **Invarianza transicional:** $\rho: (x + \alpha r_0) = \rho\ (x) - \alpha$ para todas las variables aleatorias x y número real α, y todas las tasas libres de riesgo r_0 .

Si ρ satisface las propiedades anteriores, entonces es una medida de riesgo (coherente).

Revisemos la intuición financiera de estas condiciones. Con respecto a subaditividad, si ρ no fuera subaditiva, entonces $\rho\ (x) + (y) < \rho\ (x+y)$, esto podría implicar, por ejemplo, que con el propósito de reducir el riesgo, sería conveniente dividir una empresa en distintas divisiones. Desde un punto de vista regulatorio, como el riesgo se reduce, esto podría permitir reducir el requerimiento de capital. Note que la covarianza es subaditiva, y esta propiedad es esencial en la teoría de portafolio de Markowitz, en que el fenómeno de la diversificación implica que ningún nuevo instrumento incrementa el riesgo.

Invarianza transicional implica que por el hecho de agregar un retornos por seguro αr_0 a un retorno aleatorio *x* el riesgo $\rho\ (x)$ decrece por α .

Para definir formalmente el VaR de un portafolio, en primer lugar debemos elegir dos factores cuantitativos: el largo del horizonte de mantención y el nivel de confianza. Ambos son números arbitrarios.

Sobre la base de las anteriores condiciones que deben ser satisfechas por cualquier medida de riesgo, pasamos a resumir las principales críticas a VaR y a las regulaciones asociadas a ella.

Críticas a VaR y a las regulaciones que la proponen

En general VaR no es una medida de riesgo coherente y en particular no es subaditiva. Solamente en el caso especial de distribución de retornos normal o distribución-t VaR es subaditiva, es decir:

VaR= $(P_1 + P_2) \leq$ VaR (P_1) + VaR (P_2)

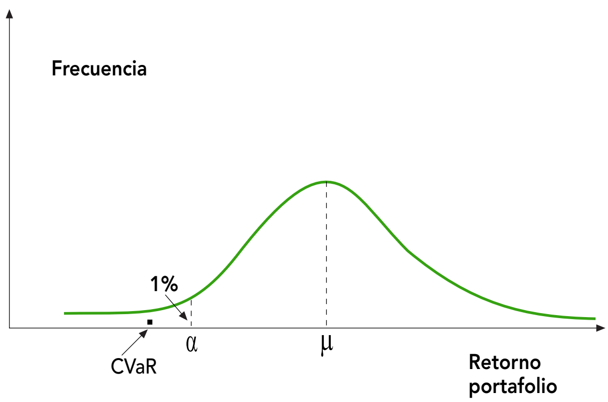
Donde P_1 y P_2 denotan los retornos de dos portafolios. Sin embargo, en este caso, VaR es proporcional a la desviación estándar, por lo que no aporta mayor información que esta medida de dispersión. Por lo tanto, para la mayoría de las distribuciones de retornos VaR no es una medida de riesgo aceptable.

El cuerpo regulatorio más importante que ha impulsado el uso de VaR como una de las posibles medidas de riesgo es el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria. Si agencias regulatorias insisten en su uso, algunas consecuencias dañinas podrían ocurrir. Daníelsson et al. (2001) plantea la siguiente crítica "VaR puede desestabilizar una economía e inducir crashes donde de otro modo no hubieran ocurrido".

Como en general VaR no es una medida de riesgo coherente ¿qué alternativas están disponibles?

Diagrama 2 :

Representación de VaR Condicional



Alternativas a VaR: Nuevas medidas

Las medidas de riesgo que hemos estudiado, tales como varianza, correlación lineal y VaR, en general son:

- No convexas y conducen a resultados absurdos;
- No permiten medir el grado de co-dependencia entre estas variables aleatorias

Hay varias medidas que satisfacen las condiciones a) – d) y que pueden ser usadas para medir riesgo:

- Expected regret (ER)
- VaR Condicional (CVaR)
- Expected shortfall (ES)
- Tail condicional expectation (TCE) y tail mean (TM)
- Worst condicional expectation (WCE)
- Medidas de riesgo espectrales

Por razones de espacio no desarrollaremos cada una de estas medidas. El principal desafío es la implementación de ellas, ya que implican departir del supuesto de normalidad y requieren identificar las distribuciones empíricas de los activos.

De todas las medidas alternativas, la más conocida es VaR Condicional (CVaR) que es definida como el retorno esperado del portafolio dado que el retorno es menor que α (el valor mínimo dada una cierta probabilidad). En el diagrama 2 identificamos la localización de ese valor. Es posible optimizar el VaR Condicional, en el sentido de buscar un portafolio que logre el mínimo CVaR. Romero- Meza y Laengle (2005) estudian algoritmos que permitan implementar tal optimización.

Conclusión

La literatura financiera teórica y empírica ha demostrado las falencias de la medida VaR, y ha propuesto medidas alternativas. Uno podría esperar que importantes desarrollos en finanzas tuvieran inmediata aceptación e implementación por parte de los actores relevantes. Sin embargo, Szegö (2004, Capítulo 1) hace un recuento de la aceptación de nuevas ideas en su respectivo tiempo y podemos concluir que la aceptación total siempre lleva tiempo.

Por ejemplo las ideas de Markowitz no fueron rápidamente aceptadas por la industria financiero debido a las dificultades técnicas para resolver un problema de programación cuadrática (minimizar la varianza de un portafolio). Estas ideas tuvieron un impacto más rápido en la academia. Por otro lado, las ideas de Merton, Black y Scholes fueron rápidamente aceptadas por la industria financiera, pero no por la academia, debido a lo complejo de las matemáticas envueltas, que utiliza cálculo estocástico y el lema de Itô. Hoy en día muchas implementaciones de estos

Hay una gran variedad de formas en que puede ser calculado VaR. Si las empresas usan distintos métodos de cálculo para el mismo portafolio pueden llegar a distintos números de VaR. Hay ventajas y desventajas en cada método de cálculo y no hay la mejor forma de hacerlo.

modelos son facilitadas por el uso de simuladores, que son programas que corren por ejemplo en software tan común como planillas electrónicas y permiten aplicar modelos probabilísticas para resolver problemas financieros. Finalmente, resulta difícil evaluar el grado de aceptación de las nuevas técnicas de medición de riesgo tales como ES o CVaR, sin embargo es posible afirmar que hasta la fecha, estos conceptos han sido más fácilmente aceptados en la industria financiera, que por la academia y los reguladores.

La Escuela de Postgrado en Economía y Administración de la Universidad de Chile se ha propuesto un rol activo en la difusión y aplicación de los temas financieros más avanzados, ya sea por medio de los cursos que se imparten a nivel de Magíster o a través del desarrollo de tesis de grado.

Anexo

Ejemplo de implementación de método de correlación para cálculo de VaR

En éste anexo desarrollaremos un ejemplo de implementación del método de correlación para calcular VaR para tres activos. Utilizaremos un software tan común como una planilla electrónica. Esencialmente, este método intenta calcular la varianza de todo el portafolio sobre la base de las varianzas de cada activo que lo compone y las relaciones entre factores de riesgo.

En Hoja 1 se presentan los datos base y los comandos específicos del software entre paréntesis.

Hoja 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3	Retorno Medio Activos			Matriz Var-Covar				Ponderación Activos						
4	8%			0,2	0,04	0,05		0,25						
5	10%			0,04	0,3	-0,1		0,35						
6	12%			0,05	-0,1	0,5		0,40						
7														
8	Inversión Inicial	100												
9	Retorno Esperado Portafolio						Ponderación Activos				Retornos Activos			
10	10,3%	<= {=MMULT(G10:I10,K10:K12)}					0,25	0,35	0,40	x	8%			
11											10%			
12											12%			
13	Varianza Portfolio													
14	0,118	<= {=MMULT(MMULT(E16:G16,I16:K18),M16:M18)}												
15					% en Activos				Matriz Var-Covar			Ponderación Activos		
16					0,25	0,35	0,40	x	0,2	0,04	0,05	x	0,25	
17	Desv. Estand. Portfolio								0,04	0,3	-0,1		0,35	
18	0,344	<= {=RAIZ(A14)}							0,05	-0,1	0,5		0,40	
19														
20	Valor Medio Inversión	110,3												
21														
22														
23	Inv. Esperada Corte	30,303	<= {=DISTR.NORM.INV(0,01;(1+A10)*B8;A18*B8)}											
24														
25	VAR al 1 %	79,997	<= {=B20-B23}											

Podemos obtener el VaR a un 99% de confianza dentro de un período como:

VaR = Valor medio de la inversión – inversión esperada de corte
= 110, 3 – 30,3 = 80

Es decir, con una inversión inicial de $100, hay un 1% de probabilidad de perder más de $80 con respecto al retorno esperado de $110,3.

Este ejemplo es fácil de expandir para 30 o 40 activos.

Referencias

Artzner, Philippe, Fredy Delbaen, Jean-Marc Eber and David Heath (1997) "Thinking Coherently", Risk, 10, pp. 33-49.

Artzner, Philippe, Fredy Delbaen, Jean-Marc Eber and David Heath (1999) "Coherent Measures of Risk", Mathematical Finance, 9, pp. 203-228.

Daníelsson, J., Embrechts, P., Goodhart, C., Muennich, F., Renault, O., Shin, H.S. (2001) "An Academic Response to Basel II", Special Paper N° 130, FGM y ESRC, Londres.

Hull, John C. (2003) Options, Futures, and Other Derivatives, Fifth Edition, Prentice Hall, New Jersey

Markowitz, H.M. (1952) "Portfolio Selection", Journal of Finance, 7, pp. 77-91

Markowitz, H.M. (1959) Portfolio Selection, Wiley, New York.

Merton, Robert C. (1990) Continuous-Time Finance, Basil Blackwell, 2ed, Oxford.

Romero - Meza, Rafael y Sigifredo Laengle (2005) "Implementación de Value-at-Risk Condicional para la Toma de Decisiones", mimeo Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas.

Szegö, Giorgio (2004) Risk Measures for the 21st Century, Wiley, New York