# MODELOS GARCH

**1. Hechos estilizados en las series de tiempo**

a. La mayoría de las series contiene una tendencia (determinísticas, con rumbo).
b. Existen choques que presentan una alta persistencia (a la baja o al alza, ej. Las tasas de interés).
c. La volatilidad de series financieras no es constante en el tiempo (ejemplo: la variabilidad en el precio de las acciones).
d. Algunas series no muestran una clara tendencia (ej. Variaciones del tipo de cambio real).
e. Algunas series muestran co-movimientos con otras series (Ej. Índice industrial de EEUU y Reino Unido).

**2. Proceso ARCH**

Engle (1982) elimina la hetersoscedasticidad condicional y autoregresiva con un modelo simultáneo de ecuación media y ecuación varianza.

Ejemplo: se parte de un modelo ARIMA (1,0,0):

$$y_{t,h} = a_0 + a_1 * y_{t,h-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Si se quiere predecir $y_{t+1}$

$$E_t y_{t+1} = a_0 + a_1 * y_t \ (2)$$

Llevando (1) a una forma de operadores polinomiales de rezagos:

$$y_t - a_1 * y_{t-1} = a_0 + \varepsilon_t$$

$$(1 - a_1 L)\, y_t = a_0 + \varepsilon_t \quad (3)$$

Aplicando raíces en (3): $y_t = \frac{a_0}{1-a_1}$

En (2) la varianza incondicional será:

$$E_t(y_{t+1} - a_0 - a_1 * y_t)^2 = E_t(\varepsilon_{t+1}^2)^2 = \hat{\sigma}^2 \quad (4)$$

Sin embargo, la varianza incondicional será:

$$E_t\left(y_{t+1} - \frac{a_0}{1-a_1}\right)^2 = E_t(\varepsilon_{t+1} + a_1\varepsilon_t + a_1^2\varepsilon_{t-1} + a_1^3\varepsilon_{t-2} + \cdots)^2 =$$

$$= E(\varepsilon_{t+1}^2) + a_1^2 E(\varepsilon_t^2) + a_1^4 E(\varepsilon_{t-1}^2) + a_1^6 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \cdots$$

$$= \hat{\sigma}^2 + a_1^2 \hat{\sigma}^2 + a_1^4 \hat{\sigma}^2 + a_1^6 \hat{\sigma}^2 + \cdots$$

$$= \hat{\sigma}^2 (1 + a_1^2 + a_1^4 + a_1^6 + \cdots)$$

$$= \hat{\sigma}^2 / (1 - a_1^2) \quad (5)$$

Si $\hat{\sigma}^2 = 1$; $0 < a_1^2 < 1$ ; luego entonces $\frac{1}{1-a_1} > 1$

La varianza incondicional es mayor que la varianza condicional del pronóstico.

Si consideramos:

$$y_t = a_0 + a_1 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde $E(\varepsilon_t^2)$ no es constante.

La varianza incondicional de $y_{t+1}$ será:

$$Var\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right) = E_t(y_{t+1} - a_0 - a_1 * y_t)^2 = E_t(\varepsilon_{t+1}^2)^2 = \hat{\sigma}^2$$

Supondremos que la varianza no es constante; una estrategia es proyectar la varianza condicionada como un proceso ARCH(p):

Heteroscedasticidad condicional autorgresiva

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + v_t \quad (6)$$

Donde $v_t$ es un proceso de ruido blanco

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_p = 0$ (Prueba ARCH); la varianza es constante en $\alpha_0$; caso contrario existe un efecto ARCH (p).

Se puede proyectar la varianza condicional en +1 como:

$$E_t\,(\varepsilon_{t+1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_t^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t+1-p}^2$$

Un efecto ARCH puede derivarse de: a) Modelo de regresión estándar; b) un proceso autoregresivo; c) un modelo ARIMA.

Sin embargo, la especificación de 6 es inconveniente: **¿Por qué?**

$y_t$ y la varianza condicional deben ser estimados simultáneamente:

Engle (1982) $E_t\ (\varepsilon_t) = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\ \varepsilon_{t-1}^2}$ (7)

$v_t \sim (0{,}1);\ v_t\ \wedge \varepsilon_{t-1}\ \sim iid$

Luego elevando (7) al cuadrado:

$$E_t\ \varepsilon_t^2 = E\ v_t^2\ (\alpha_0 + \alpha_1\ \varepsilon_{t-1}^2)$$

Si asumimos que $\sigma_v^2 = 1$ $\quad E_t\ \varepsilon_t^2 = E_t\ \varepsilon_{t-1}^2$

$$\varepsilon_t^2 = 1\ (\alpha_0 + \alpha_1\ \varepsilon_t^2) \quad (8)$$

Se tiene la varianza incondicional de $\varepsilon_t$:

$$E\ \ \varepsilon_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad (9)$$

La varianza condicional de $\varepsilon_t$ para un ARCH (1) será

$$E\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \ldots}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\ \varepsilon_{t-1}^2 \quad (10)$$

Condiciones para la varianza condicional:

$\alpha_0 > 0;\ 0 < \alpha_1 < 1$ (Varianza no negativa y estacionaria)